



**Zadania na XIII Podkarpacki Konkurs Matematyczny
im. Franciszka Lejki
Poziom II**

(klasy drugie liceum i trzecie technikum)

Finał

13 kwietnia 2013 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Wykaż, że nierówność

$$x^8 + x^6 - 4x^4y + x^2y^2 + y^2 \geq 0$$

jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych x oraz y .

Dla jakich x i y zachodzi równość?

2. Niech a , b , c będą długościami boków trójkąta. Wykaż, że

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

3. Znajdź największą wartość ułamka:

$$\frac{-x^4-3}{x^4+4x^2+4}$$

oraz x dla którego ułamek osiąga największą wartość.

4. Wykaż, że jeśli równania $x^3 + ax + b = 0$ i $x^3 + cx + d = 0$ mają wspólne niezerowe rozwiązanie rzeczywiste, to

$$(ad - bc)(a - c)^2 = (b - d)^3.$$

5. Wysokość CD trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$, ma długość h . Na wysokości CD jako na średnicy zakreślono okrąg przecinający ramię BC w takim punkcie E , że $\frac{|CE|}{|EB|} = \frac{k}{l}$. Oblicz pola trójkątów ABC i CDE .

Powodzenia!